ARBEITSBLATT ZUR PRODUKTREGEL

Satz: *Produktregel*

Gegeben sei die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ als Produkt der Funktionen *u* und *v*. Sind die Funktionen *u* und *v* an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch *f* an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

Aufgabe 1: Zeige die Richtigkeit der Produktregel an folgenden Beispielen, indem du im 1. Weg die Produktregel anwendest und das Ergebnis zusammenfasst und im 2. Weg erst die Funktion vereinfachst und dann ableitest.

Beispiel: $f(x) = x \cdot x^2$

1. Weg:

$u(x) = x,\ v(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$

2. Weg:

$f(x) = x \cdot x^2 = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2$

a) $f(x) = x^3 \cdot (x-2)$ **b)** $f(x) = x \cdot \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = (x-3) \cdot (x^2 + 2x - 1)$

Aufgabe 2: Beweise die Produktregel, der Anfang ist bereits gemacht.

$$\begin{aligned}
& f'(x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) \quad - u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x) \quad - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} \\
&= \ldots \\
&= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)
\end{aligned}$$

hier wurde lediglich der Term $u(a) \cdot v(x)$ zuerst subtrahiert und anschließend wieder addiert.
Dieser "Trick" ist ähnlich wie bei der quadratischen Ergänzung.

Aufgabe 3: Leite mithilfe der Produktregel ab! Vereinfache das Ergebnis!

a) $f(x) = x \cdot (x-3)$ **b)** $f(x) = (x^2+1) \cdot \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \sin(x) \cdot \sqrt{x}$ **d)** $f(t) = (t-5)(t^3+1)$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \cdot (x^2 + 3x)$ **f)** $f(a) = (2a^2 - 3)^2$ **g)** $f(b) = (3x + 6b) \cdot x$ **h)** $f(s) = r \cdot \sqrt{s}$

i) $f(x) = x^{0,5} \cdot \sqrt{x}$ **j)** $f(x) = \sin(x) \cdot (2x+1) \cdot \sqrt{x}$ **k)** $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

Aufgabe 4: Leite eine Ableitungsregel für Quotienten von Funktionen her.
Prüfe die Regel an fünf selbstgewählten Beispielen mithilfe deines Taschenrechners.

Satz: *Quotientenregel*

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ als Quotient der Funktionen *u* und *v*. Sind die Funktionen *u* und *v* an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch *f* an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$